

I CONTRIBUTI DI BETTI BELTRAMI ALLA FISICA MATEMATICA ITALIANA

La presente relazione si propone di fornire qualche elemento per una storia della fisica matematica italiana dall'Unità alla prima guerra mondiale. In questo contesto, Betti, Beltrami e i loro allievi giocarono un ruolo fondamentale. Essi fornirono contributi essenziali alle ricerche sulla meccanica e sulle teorie dell'elasticità, del potenziale e del calore e influenzarono Ricci Curbastro nella sua formulazione del calcolo tensoriale.

1. L'opera fisico matematica di Beltrami

Beltrami studiò all'Università di Pavia a partire dal 1853 ma ben presto ne fu allontanato perché coinvolto in azioni sovversive. Dopo alcuni anni trascorsi nel Veneto, egli tornò a Milano dove ebbe l'opportunità di riprendere a frequentare Brioschi e di fare la conoscenza di Cremona, entrambi personaggi chiave nella sua formazione scientifica. Beltrami, che non conseguì mai la laurea, fu nominato per decreto professore di algebra e geometria analitica all'Università di Bologna nel 1862. In seguito, egli divenne professore a Pisa, dove insegnò geodesia dal 1863 al 1866, poi nuovamente a Bologna sulla cattedra di meccanica razionale fino al 1873 quando si trasferì a Roma dove restò fino al 1876 per farvi ritorno definitivamente nel 1891, dopo avere insegnato fisica matematica e meccanica superiore all'Università di Pavia.

Beltrami, noto soprattutto per i suoi contributi alla geometria non euclidea (1868a, 1869), ha scritto oltre cento articoli su argomenti di elettricità, magnetismo, teoria del calore, potenziale ed elasticità negli ultimi trent'anni di carriera. I suoi scritti di carattere fisico e fisico matematico, oltre ad aver aperto la strada a nuove e importanti ricerche in vari campi, sono tesi al tentativo di fornire una spiegazione meccanica della propagazione dei fenomeni mediante le deformazioni di un *etere* che pervade l'intero universo. Il sistema di sforzi del mezzo eterico, pensato come un fluido elastico, omogeneo e isotropo, può studiarsi mediante la teoria matematica dell'elasticità di cui Navier aveva posto le basi nel 1821. In quest'ottica viene bandita l'*azione a distanza* mentre l'*azione per contatto*, che si propaga da una particella di etere a quella immediatamente vicina, prende il suo posto nella fisica.

Secondo Beltrami, l'universo non era necessariamente euclideo; egli tentava in più occasioni di interpretare meccanicamente la trasmissione dei fenomeni elettrici, magnetici ed elettromagnetici assumendo che lo spazio fosse dotato di curvatura e, in particolare, supponeva che l'etere riempisse uno spazio sferico, pseudosferico o euclideo a seconda del fenomeno che vi aveva luogo. Gli strumenti matematici indispensabili allo studio degli spazi non euclidei erano stati introdotti da Riemann nella sua lezione di abilitazione tenuta nel 1854, ma pubblicata postuma solo nel 1868. Qui Riemann, introducendo alcuni metodi e concetti basilari, come quello di varietà e di curvatura, dà l'avvio a uno studio organico e sistematico della geometria differenziale.

Al fine di 'dar conto' della propagazione delle forze in uno spazio con curvatura costante, Beltrami generalizzava a tale spazio le definizioni e i risultati fondamentali delle teorie del potenziale e dell'elasticità applicando le procedure geometriche differenziali sviluppate da Riemann nella sua lezione. Il teorema di Green, ad esempio, veniva esteso prima ad una superficie qualunque, poi a spazi con curvatura costante e infine a una generica varietà riemanniana (cf. 1864-65, 1868b). L'equazione di Laplace-Beltrami era dedotta da Beltrami (1868b) dalla generalizzazione a una varietà del secondo parametro differenziale, un'espressione differenziale invariante per trasformazioni di coordinate che era

stata introdotta da Lamé (1834).

Dopo aver esteso le componenti di rotazione di una deformazione elastica e la dilatazione cubica a coordinate qualunque (1871-1874), Beltrami era in grado di dedurre le equazioni dell'equilibrio di un corpo elastico isotropo in uno spazio con
1 Dipartimento di Matematica, Università di Catania, Viale A. Doria 6, 95125 Catania

curvatura costante (1882). Utilizzando queste e altre equazioni, valide per la funzione potenziale in uno spazio curvo, Beltrami tentava di fornire una spiegazione meccanica delle linee di forza elettriche e magnetiche (1882) e si proponeva di determinare le tensioni dell'etere affinché quest'ultimo fosse in grado di propagare le onde elettromagnetiche (1884a, 1884b, 1886). Il tentativo di risolvere quest'ultima questione portava Beltrami a stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perché sei funzioni date costituissero le componenti di una *possibile* deformazione (1889). Nel caso di un corpo elastico e isotropo, le componenti di tensione dovevano soddisfare certe condizioni, che sono oggi denominate *equazioni di Beltrami* (1892).

Le questioni di *filosofia naturale* sono dunque state determinanti nelle ricerche di Beltrami; il tentativo di fornire una descrizione matematica della realtà ha infatti costituito un pressante stimolo per generalizzare definizioni e concetti fondamentali della fisica matematica agli spazi curvi e per dimostrare risultati matematicamente rilevanti. Inoltre, il fatto stesso che l'universo collabori alla propagazione delle forze mediante una variazione della curvatura lascia intravedere la possibilità che le varietà riemanniane, oltre a rappresentare un concetto essenziale in geometria differenziale, rivestano un ruolo rilevante anche nella fisica. Punto di vista, questo, confermato molti anni più tardi con la teoria della relatività di Einstein.

2. Il contributo di Betti alle teorie del potenziale e dell'elasticità

Betti si laureò a Pisa nel 1846 e nel 1848 prese parte alla guerra di indipendenza col battaglione universitario toscano. Nel 1857, egli divenne professore di algebra superiore all'Università di Pisa e, nel 1859, ebbe la cattedra di analisi superiore per poi passare all'insegnamento della fisica matematica che mantenne fino al termine della sua carriera. Egli inoltre diresse a partire dal 1865, salvo brevissime interruzioni, la Scuola Normale Superiore di Pisa. Betti fornì importanti contributi alla teoria delle equazioni algebriche, lavorando sulle funzioni iperellittiche, e alla topologia, ma si dedicò anche alla fisica matematica per più di vent'anni, in particolare alle teorie del potenziale e dell'elasticità. I lavori principali di Betti sulla teoria del potenziale sono una serie di articoli apparsi sul *Nuovo Cimento* negli anni 1863-64 e un trattato pubblicato nel 1879 dal titolo *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo*.

Questi lavori non appaiono disgiunti dalle problematiche legate al principio di Dirichlet, la cui validità fu oggetto di un acceso dibattito durante tutta la seconda metà dell'Ottocento. È interessante a riguardo il diverso atteggiamento verso il principio di Dirichlet che Betti mostra nei suoi scritti; il che presuppone anche l'uso di differenti metodi per la risoluzione del problema di Dirichlet. In quest'ambito ha assunto un ruolo fondamentale, nell'opera di Betti, l'uso della funzione di Green per determinare la soluzione di questioni riguardanti le teorie del potenziale, dell'elasticità e del calore. Senza entrare in inutili dettagli, l'introduzione di funzioni *analoghe* alla funzione di Green ha permesso a Betti di risolvere numerosi problemi fisico matematici e di dedurre alcune importanti conseguenze del suo celebre teorema di reciprocità (1872-73). Questo teorema

afferma che se si considera un solido elastico e omogeneo R con densità ρ e limitato da una superficie σ e se (u, v, w) , (u', v', w') sono due sistemi di spostamenti, (X, Y, Z) , (X', Y', Z') le forze di volume e (L, M, N) , (L', M', N') le forze superficiali a loro corrispondenti, allora vale la seguente formula:

(1)

$$\int_{\sigma} (L'u + M'v + N'w)d\sigma + \rho \int_R (X'u + Y'v + Z'w)dR = \int_{\sigma} (L'u + M'v + N'w)d\sigma + \rho \int_R (Xu' + Yv' + Zw')dR.$$

Dal teorema di reciprocità, espresso dalla relazione (1), Betti deduceva alcune funzioni, che giocavano lo stesso ruolo della funzione di Green nella teoria del potenziale e che gli consentivano di descrivere la rotazione e la dilatazione di un corpo elastico e isotropo in equilibrio mediante le forze che agivano sul corpo stesso.

Il profondo interesse di Beltrami per la *filosofia naturale* non si ritrova nei lavori, pressoché contemporanei, di Betti. Tuttavia è possibile rintracciare, negli appunti di quest'ultimo e nelle ricerche dei suoi studenti, un'attenzione particolare verso i fondamenti della teoria dell'elasticità, l'interpretazione meccanica delle equazioni di Maxwell e la teoria dell'elasticità negli spazi curvi. In alcune note, tratte dalle sue lezioni di fisica matematica all'Università di Pisa o frutto di meditazioni su delle ricerche di Dirichlet, Riemann e dello stesso Beltrami, Betti propone più volte il tema dell'etere e sviluppa un'analisi del moto dell'etere e delle sue deformazioni elastiche. E' dunque lecito chiedersi se, e in che termini, Beltrami e Betti avevano interessi comuni e in che modo questi riguardassero il tentativo di fornire un'interpretazione del mondo fisico in termini meccanici.

3. Interessi comuni di Beltrami e Betti

Betti e Beltrami furono colleghi tra il 1863 e il 1866, quando Beltrami fu professore di geodesia all'Università di Pisa, nello stesso periodo in cui Riemann trascorse un paio d'anni presso la stessa Università. Nel "Fondo Betti", contenuto presso l'Archivio della Scuola Normale Superiore di Pisa, vi sono 11 lettere di Beltrami a Betti che hanno per lo più carattere istituzionale e che testimoniano il grande peso politico di questi due personaggi sulle vicende universitarie legate all'assegnazione di cattedre e, più in generale, all'insegnamento della fisica matematica in Italia.

Per quanto riguarda la fisica matematica, Betti e Beltrami si occuparono soprattutto di questioni legate alle teorie del potenziale e dell'elasticità e condivisero, oltre a questi, numerosi altri interessi scientifici. Le ricerche comuni più salienti, che si ritrovano sia nei loro lavori pubblicati, sia nelle carte di Betti, possono riassumersi nei termini seguenti:

1) Betti e Beltrami ritenevano che il teorema di Green rivestisse un ruolo privilegiato nella teoria del potenziale e della sua generalizzazione si occuparono entrambi. Beltrami lo estese alle varietà riemanniane (cf. § 1) e Betti utilizzò la funzione di Green per risolvere varie questioni di fisica matematica: teoria del calore (1868), elasticità (1872-73) (cf. § 2) e propagazione del suono. Su quest'ultimo argomento si trovano alcuni appunti di Betti appartenenti con ogni probabilità alle *Lezioni di Fisica Matematica 1866/67* dove viene stabilita una relazione che è l'analogo della formula di Green nel caso dell'equazione della propagazione del suono ("Fondo Betti", Vol. XIII).

2) Beltrami (1884a, 1884b, 1886; cf. § 1) cercò di risolvere il problema posto da Maxwell: qual è il sistema di sforzi a cui è sottoposto l'etere affinché tale mezzo sia in grado di propagare i fenomeni elettromagnetici nello spazio?

Nel suo *Treatise on electricity and magnetism* (1873), Maxwell presentava il sistema di tensioni e di pressioni dell'etere posto tra due sistemi elettrici interagenti. L'azione elettrica tra i due sistemi, descritta facendo ricorso alla teoria dell'azione per contatto, prevedeva che nel mezzo "che si estendeva con continuità" tra i due corpi si producesse uno sforzo costituito da una tensione lungo le linee di forza e da una pressione normale a queste linee. Se non esistesse alcun mezzo allora le componenti del sistema di sforzi dell'etere sarebbero mere abbreviazioni di espressioni "prive di significato fisico".

Senza entrare nei dettagli, Beltrami (1884a) determinava un sistema di masse in cui il lavoro delle forze newtoniane coincideva col lavoro delle forze elastiche date dalle formule di Maxwell. In particolare, egli mostrava che le tensioni lungo le linee di forza erano uguali a quelle già dedotte da Maxwell. Inoltre, Beltrami (1884b) forniva una deduzione "diretta" e generale delle formule di Maxwell assumendo che le coordinate fossero assolutamente generali, cioè curvilinee e oblique e, in un articolo pubblicato due anni dopo (1886), stabiliva l'impossibilità per un mezzo elastico, omogeneo e isotropo di deformarsi in modo tale da dar luogo al sistema di forze di Maxwell. Dunque, poiché "non è generalmente possibile riprodurre il sistema delle pressioni definite dalle formole di Maxwell mediante le deformazioni di un mezzo isotropo" (1886, 192), si doveva indagare "per altre vie", affermava Beltrami, l'interpretazione meccanica della teoria di Maxwell.

In alcuni appunti contenuti nel "Fondo Betti" (Vol. IX), datati 26 luglio 1881, Betti considerava un sistema di masse che dava luogo alle tensioni e pressioni date da Maxwell e determinava il sistema di sforzi dell'etere affinché questo fosse in grado di propagare i fenomeni elettrici e magnetici.

3) Beltrami stabilì le equazioni dell'equilibrio elastico in uno spazio con curvatura costante e le pubblicò negli *Annali di matematica pura ed applicata* del 1880-82 (1882). In un appunto di Betti, del 26 luglio 1881 e dunque precedente alla data di pubblicazione del lavoro Beltrami, si trova lo stesso sistema di equazioni ("Fondo Betti", Vol. IX). E' tuttavia possibile che Betti fosse a conoscenza dello scritto di Beltrami, che questi aveva terminato poche settimane prima, anche in qualità di responsabile degli *Annali*.

4) Sia Beltrami, sia Betti si interessarono ai fondamenti della teoria dell'elasticità. Beltrami si occupò per lunghi anni di problemi riguardanti la struttura della materia e le forze che legano insieme atomi e molecole e se ne trova traccia nelle sue lezioni sulla teoria matematica dell'elasticità, che egli tenne presumibilmente a Roma negli ultimi anni della sua vita e che furono manoscritte da un suo studente, Alfonso Sella. Le lezioni di Beltrami, che sono contenute presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica di Genova e di cui sono pubblicati degli stralci (cf. Tazzioli 1993), si inseriscono nel dibattito ottocentesco che aveva per oggetto fondamentali problemi di teoria dell'elasticità, come l'esistenza o meno dei raggi luminosi longitudinali e trasversali, e i modelli di etere da impiegarsi per descrivere la propagazione delle forze fisiche. In alcuni appunti, Betti affronta questioni concernenti la costituzione dei corpi elastici sulle quali non sempre ha idee molto precise; spesso, egli si limita a riportare le opinioni più accreditate dell'epoca che però appaiono, in molti punti, contraddittorie ("Fondo Betti", Vol. X, Vol. XI).

4. L'influenza di Betti e Beltrami sulla fisica matematica italiana.

Beltrami cambiò spesso Università e insegnamento e non ebbe pertanto l'opportunità di creare una vera e propria scuola. Egli ebbe comunque degli studenti, che solo parzialmente seguirono le sue lezioni all'università, ma che

tuttavia si ispirarono a lui per svolgere ricerche soprattutto nei campi della geometria differenziale e della fisica matematica. Padova e Somigliana furono studenti di Beltrami ed entrambi si laurearono a Pisa, il primo nel 1866 e il secondo nel 1881. In seguito, Padova divenne professore di meccanica razionale all'università di Pisa nel 1869 e nel 1882 fu trasferito, in seguito a sua richiesta, a Padova sulla cattedra di meccanica superiore. Somigliana insegnò fisica matematica a Pavia a partire dal 1887 e, nel 1903, si trasferì a Torino dove rimase fino alla morte. Anche Cesàro venne profondamente influenzato dalle ricerche di Beltrami, sebbene non lo ebbe mai come insegnante. Nel 1887, dopo essere stato giudicato primo nel concorso di professore all'Università di Messina, Cesàro accettò la cattedra di analisi resasi vacante a Palermo dove restò fino al 1891, anno in cui si trasferì all'Università di Napoli a insegnare calcolo infinitesimale. Interessanti sono le diciassette lettere che Beltrami scrisse a Cesàro tra il 1883 e il 1900 dove sono contenute numerose considerazioni su problemi di fisica matematica (cf. Palladino, Tazzioli 1996).

Cesàro, Padova e Somigliana dedussero risultati interessanti sulle teorie del potenziale e dell'elasticità, soprattutto in spazi curvi, e contribuirono alla formazione della fiorente scuola italiana di geometria differenziale. E' forse il caso di osservare che Somigliana (1890) determinò le sue celebri *equazioni*, che esprimono gli spostamenti all'interno di un corpo in funzione delle forze date e degli spostamenti sulla superficie, a partire da considerazioni legate all'interpretazione meccanica delle equazioni di Maxwell del tutto ispirate ai lavori di Beltrami.

Betti insegnò fisica matematica alla Scuola Normale Superiore di Pisa per gran parte della sua carriera di professore, durata trentacinque anni. Egli ebbe un'enorme influenza sullo sviluppo della fisica matematica italiana; i suoi studenti furono numerosi e alcuni di essi divennero personaggi autorevoli, basti ricordare Dini, Ricci Curbastro e Volterra. Nel 1876 Dini, che aveva anche avuto l'occasione di seguire i corsi di geodesia di Beltrami a Pisa, pubblicò un articolo dove veniva descritta una funzione analoga a quella di Green per un problema di Neumann in due dimensioni (1876), che oggi viene usualmente denominata funzione di Green di seconda specie.

Ricci, che fu allievo di Padova oltre che di Betti, merita una menzione particolare; egli si occupò dell'interpretazione meccanica delle equazioni di Maxwell (cf. § 1 e 3) prima che fossero pubblicati gli articoli di Beltrami sullo stesso argomento (Ricci 1877). L'influenza di Betti sulla scelta del soggetto e sulla sua trattazione è dichiarata dallo stesso Ricci e appare ancora più evidente nella determinazione del sistema di sforzi dell'etere atto a sviluppare le forze elettriche. In particolare, ammettendo "che ad ogni punto dello spazio esista una tensione p secondo la direzione della risultante ed in ogni direzione a questa normale una pressione p ", Ricci (1877, 74) dimostrava come questo sistema di forze interne spiegasse sia la trasmissione delle azioni reciproche delle masse elettriche sia l'equilibrio del mezzo.

Le idee di Ricci riguardanti il mezzo etereo e la partecipazione di questo alla trasmissione delle forze nello spazio muteranno radicalmente nel corso degli anni. Mentre in questo e in altri articoli pubblicati intorno agli anni '80 Ricci condivide l'opinione di Beltrami, Somigliana, Cesàro, Padova e di Betti stesso sulla necessità di ammettere l'esistenza dell'etere, nella commemorazione in onore di Padova, letta nel 1897, Ricci si astiene da assunzioni circa l'esistenza del mezzo etereo e non prende posizione sull'azione a distanza o per contatto. Ricci sostiene che il compito della "fisica teorica" è quello di fornire una

rappresentazione matematica, simbolica, della realtà fisica e che non si devono avanzare ipotesi sulla natura dello spazio. In quest'ottica l'etere, divenuto un inutile supporto, lascerà il posto alla struttura geometrica dello spazio, ossia al *campo* svincolato dalla materia.

Le opere di Betti e Beltrami lasciano dunque trasparire un percorso teorico che, dalle ricerche di Gauss e di Riemann sulla geometria differenziale, conduce al calcolo tensoriale di Ricci. Questi, nell'articolo scritto in collaborazione con Levi Civita, applicò magistralmente il proprio *algoritmo* anche alla fisica matematica, in particolare alle teorie del calore, del potenziale e dell'elasticità (Levi Civita, Ricci 1900). Nelle sue *Lezioni sulla teoria matematica dell'elasticità*, pubblicate postume, Ricci (1957) utilizzò il calcolo tensoriale per esprimere i principali risultati ed equazioni della teoria dell'elasticità, come il tensore di deformazione, le equazioni indefinite dell'equilibrio e il potenziale elastico, in una notazione indipendente dal sistema di coordinate. I tensori costituiscono infatti gli strumenti più adeguati a formulare le leggi fondamentali della fisica che sono, per loro propria natura, indipendenti dal sistema di coordinate scelto. Questo punto di vista, del tutto innovativo, troverà ampia conferma nelle teorie fisiche dell'inizio del Novecento, in particolare nella teoria della relatività e nella meccanica quantistica.

Nell'ambiente italiano, povero di fisici teorici di grande rilievo, Beltrami e Betti rappresentavano un punto di riferimento importante anche per gli studiosi europei, e tedeschi in particolare. Indicativa, a questo riguardo, è una lettera di Beltrami a Klein, datata 17 aprile 1888 (in "Nachlass Klein", Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek di Göttingen), dove Beltrami così commenta l'atteggiamento dei fisici italiani verso la matematica:

"Quant à la crainte que Vous semblez concevoir d'un divorce toujours croissant entre les mathématiques et la physique, j'oserais vous dire que l'Allemagne est, à mon avis, le pays où ce divorce me paraîtrait le moins avancé: peut-être certaines parties de la science n'y sont pas encore devenues assez populaires, pour ainsi dire, parmi les physiciens, mais en revanche il y en a plusieurs autres qui sont entrées assez bien dans le domaine commun. Que diriez Vous donc si vous voyiez de près ce qui se passe en Italie, où deux ou trois physiciens seulement ont une connaissance approfondie des théories fondamentales!"

Bibliografia

Beltrami, E.

1864-65 Ricerche di analisi applicata alla geometria, in: (Beltrami 1902-1920, I), 107-198.

1868a Saggio di interpretazione della geometria non euclidea, in: (Beltrami 1902-1920, I), 374-405.

1868b Sulla teoria generale dei parametri differenziali, in: (Beltrami 1902-1920, II), 74-118.

1869 Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, in: (Beltrami 1902-1920, I), 406-429.

1871-74 Ricerche sulla cinematica dei fluidi, in: (Beltrami 1902-1920, II), 202-379.

1882 Sulle equazioni generali dell'elasticità, in: (Beltrami 1902-1920, III), 383-407.

1884a Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità, in: (Beltrami 1902-1920, IV), 136-179.

1884b Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze

elastiche, in: (Beltrami 1902-1920, IV), 95-103.

1886 Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell, in: (Beltrami 1902-1920, IV), 190-223.

1889 Note fisico-matematiche, in: (Beltrami 1902-1920, IV), 320-329.

1892 Osservazioni alla nota del Prof. Morera, in: (Beltrami 1902-1920, IV), 510-512.

1902-1920 *Opere matematiche*, a cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma (4 voll.). Milano, Hoepli.

Betti, E.

1863-64 Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton e sua applicazione alla elettricità statica, in: (Betti 1913, II), 45-153.

1868 Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi omogenei, in: (Betti 1913, II), 216-240.

1872-73 Teoria della elasticità, in: (Betti 1913, II), 291-378.

1879 *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo*. Pisa, Nistri.

1913 *Opere matematiche*, a cura della R. Accademia dei Lincei (2 voll.). Milano, Hoepli.

Boi, L., Giacardi, L., Tazzioli, R.

1997 *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère. Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881)*. Di prossima pubblicazione, Paris, Blanchard.

Bottazzini, U.

1982 Enrico Betti e la formazione della Scuola Matematica Pisana, *Atti del Convegno "La storia delle matematiche in Italia"*. Cagliari, 29-30 settembre e 1 ottobre 1982.

Dini, U.

1876 Su una funzione analoga a quella di Green, *Atti della R. Accademia dei Lincei* (2) **3**, 129-137.

Lamé, G.

1834 Mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide étheré, *Journal de l'Ecole R. polytechnique* **14**, 191-296.

Levi Civita, T., Ricci Curbastro, G.

1900 Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, in: (Ricci 1956-1957 II), 185-271.

Maxwell, J.C.

1873 *A treatise on electricity and magnetism* (3° ed., 1892, 2 voll.). Oxford, Clarendon.

Palladino, F., Tazzioli, R.

1996 Le lettere di Eugenio Beltrami nella corrispondenza di Ernesto Cesàro, *Archive for history of exact sciences* **49**, 321-353.

Reich, K.

1994 *Die Entwicklung des Tensorkalküls*. Basel, Birkhäuser.

Ricci Curbastro, G.

1877 Sulla teoria elettrodinamica di Maxwell, in: (Ricci 1956-57, I), 69-109.

1897 Commemorazione del Prof. Ernesto Padova, in: (Ricci 1956-57, II), 62-80.

1956-1957 *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana (2 voll.). Roma, Cremonese.

1957 *Lezioni sulla teoria matematica dell'elasticità*, in: (Ricci 1956-57, II), 449-571.

Riemann, B.

1854 Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, in:
(Riemann 1990), 304-319. Trad. it. in: *Relatività: esposizione divulgativa* (a cura di B. Cermignani) 1967. Torino, Boringhieri.

1990 *Bernhard Riemann gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, a cura di R. Narasimhan. Leipzig, Teubner.

Somigliana, C.

1890 Sulle equazioni della elasticità, *Annali di matematica pura ed applicata* (2) **17**, 37-64.

Tazzioli, R.

1993 Ether and theory of elasticity in Beltrami's work, *Archive for history of exact sciences* **46**, 1-37.

(1)

$$\int_{\sigma} (L'u + M'v + N'w)d\sigma + \rho \int_R (X'u + Y'v + Z'w)dR = \int_{\sigma} (L'u + M'v + N'w)d\sigma + \rho \int_R (Xu' + Yv' + Zw')dR.$$

$$\int_{\sigma} (L'u + M'v + N'w)d\sigma$$

\int_{σ}

$$+ \rho$$

\int_R

$$(X'u + Y'v + Z'w)dR =$$

$$\int_{\sigma} (L'u + M'v + N'w)d\sigma$$

\int_{σ}

$$+ \rho$$

\int_R

$$(Xu' + Yv' + Zw')dR.$$